

文章编号: 1000-7598(2012)03-0695-08

分形结构土体强度研究

卫振海^{1,2}, 王梦恕¹, 张顶立¹

(1. 北京交通大学 土木建筑工程学院, 北京 100044; 2. 后勤指挥学院 后方专业勤务系, 北京 100858)

摘要: 分形结构是土体中普遍存在的一种现象, 通过对分形结构连接部位所占据的影响域(Voronoi域)的分析, 将颗粒连接承载能力换算为影响域上的应力强度, 由此获得了一些有益的结果。土体颗粒系统结构分维值的大小对土体强度有着明显的影响; 基本结构单元的颗粒数越多, 形成的环的长度越长, 占据的空间就越大, 从力学上讲就越不稳定, 因此, 其强度越低; 土体中分形结构的级数实际上决定了土体中最大孔隙的尺寸, 分形结构的级数越多, 其相应的最大孔隙越大, 等效应力强度会越低; 发现偶应力强度与基本结构单元的面积(二维)成反比, 即基本结构体越大, 偶应力强度就越小, 由此可推论出: 在其他条件相同的情况下, 颗粒越大, 偶应力强度就会越低。

关键词: 分形; 颗粒结构; 应力强度

中图分类号: TU 443

文献标识码: A

Research on strength of fractal structural soil

WEI Zhen-hai^{1,2}, WANG Meng-shu¹, ZHANG Ding-li¹

(1. School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China;

2. Department of Rear Professional Service, Logistics Command Academy, Beijing 100858, China)

Abstract: The fractal structure is a common phenomenon of soil. Through analyzing influence domain(Voronoi domain) of the fractal structure connection point, the bearing capacity of particle connection is converted to stress intensity. Some beneficial results are obtained. Values of fractal dimension of particle system structure influence soil strength obviously. The particle of basic unit is more, the ring from the particle is longer, the space for the ring is larger; it is more instable in mechanical property, the strength is lower. The stage number of fractal structure determines the size of the maximum pore. The stage number of fractal structure is more, the size of the maximum pore is larger, the equivalent stress intensity is lower. The couple stress intensity is inversely proportional to the area of basic structure unit (two-dimensional). That is to say, the basic structure unit is larger, the couple stress intensity is lower. Therefore, it can be concluded that the particle is larger, the couple stress intensity is lower when other conditions are same.

Key words: fractal; particle structure; stress intensity

1 引言

土体具有的分形特征, 许多文献^[1-5]都进行过有关研究。主要是对颗粒的分形性质(包括粒度及形态)、孔隙的分形性质、颗粒的方向角的分形分布等进行了研究。总之, 土体的结构在某种程度上, 具有分形特征。这些研究工作大多是对各类参数的分形特征地描述。有一些文献探索了这些分形参数(大多是几何特征方面的参数)与力学参数的关系^[3-6]。但这类研究成果不多, 往往是从试验参数方面进行的一些相关研究, 而从理论上进行研究的成果较少。本文通过对分形结构特点的研究, 探讨

了这类土体结构的分形特征与强度的关系。

2 分形结构的特点及其描述

2.1 土体分形的特点

分形指的是在不同尺度上, 其参数之间满足 $N(r) = 1/r^D$ 关系的现象。 N 为相似形个数, r 为相似形比例因子, D 为分形维数。体现在结构形态上, 就是在不同尺度上, 具有自相似特征的结构。在土体结构中的自相似, 也就是分形特点主要表现在以下几个方面。

(1) 粒度的分形

土体作为一种典型的粒状体, 其颗粒的大小及

分布是影响土体性能的一个重要因素。土颗粒大小的分布,许多学者都做过研究^[1-3,5],发现土颗粒粒度在一定的范围内呈现分形分布,这里的粒度主要是指粒径的大小。有些学者^[6-7]提出将粒度分维作为划分土体性能的一个标准,认为分维值越大,土体性能越好。其原因是粒度的分维说明了土体中颗粒的级配性能,反映了各种粒度颗粒的数量。

(2) 颗粒形态的分维

颗粒形态的分维主要是指颗粒的表面形态的复杂特性,一些学者^[1-5,8-9]研究发现,颗粒形态的分维值越大,颗粒的表面越复杂。颗粒表面的复杂性,会影响到颗粒之间的接触特性,即颗粒之间的相互作用关系。

(3) 孔隙分形和结构

土体的性能除了受到颗粒的粒度、形态的影响外,更重要的是受到颗粒排列关系的影响,也就是颗粒的组合结构。颗粒的排列关系形成不同的土体结构,往往反映在土体的孔隙上,在测定土体的结构时,一般也只能通过土体的孔隙来进行测定,因为要直接测定土体颗粒排列结构,是非常困难的。通过对土体孔隙的分析来掌握颗粒排列的结构特点,许多学者做了这方面的工作^[10-11],也得出了有益的结果,发现土体中的孔隙在一定范围内呈现分形分布关系。另外,由于土体颗粒形态的不均匀性,使得土体的结构也会存在某种方向上不均匀分布,而这种方向上不均匀分布有时也会存在某种分形特点。孔隙的大小和分布等特征都反映了土体结构的特点。

分形状态是自然界中一种普遍存在且重要的物质结构状态。土体结构或组成土体的颗粒要素的分形特征也充分说明了这一点。土体颗粒组成分形状态和其他状态一样,都受到系统能量的支配。系统在变化过程中,总是在寻求一种能使系统稳定的状态或亚稳定状态。土体结构的分形状态,是土体系统在变化过程中的一种符合当时条件的稳定状态或亚稳定状态,也可以认为是在当时环境条件下的最小能量状态之一。

研究发现,土体结构存在的分形特点,即不同尺度上的相似性,并不能无限级的存在或发展。土体形成分形结构,从生成原理上讲,可以这样认为,颗粒在特定的条件下,总是以能量最小方式生成特定的结构。因为环境条件一样,系统可能会以新生成的结构为基础,继续生成新一级的结构,这一级的结构是在原有结构的基础上,新一级结构与原有结构具有相似性。

从一般意义上讲,土体的结构可认为是由各种不同层次的分形结构组成。因此,研究土体结构的分形强度,就具有了普遍的适用意义。

2.2 土体分形结构体的描述

分形结构的描述可以应用迭代系统来进行^[12-14],即IFS(迭代函数系统)方法。在映射方式上,为了适应土颗粒的实际情况,可以采用扩展映射方式。主要思路是:通过实际观察,找到土体的基本结构,并通过统计的方式来获得相应的参数。在确定了基本结构后,通过迭代系统可扩展成不同级别的相似结构系统,达到要求的尺度和级别为止。

迭代变换的一般形成可以采用(平面系统)变换 $W: R^2 \rightarrow R^2$, 具体形式为

$$W \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中: a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 为实数。

当 $x \in R^2$ 时,也可以写为 $W(x) = Ax + t$, 其中 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $t = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ 。

对于一个实际的颗粒分形结构,其变换函数可能不止一个,即有 W_1 、 W_2 、 $W_3 \dots$, 一般基本结构的颗粒数决定了变换函数的个数。

对于基本结构一般有三颗粒结构、四颗粒结构、五颗粒结构...,通过分析可以发现,三颗粒结构是最稳定的结构,对连接点的承载能力要求也最低。特别是弯扭承载能力为0时,三颗粒也能形成一个稳定的结构。对于四颗粒以上结构,若节点的弯扭承载能力为0,就很难形成稳定结构(见图1)。

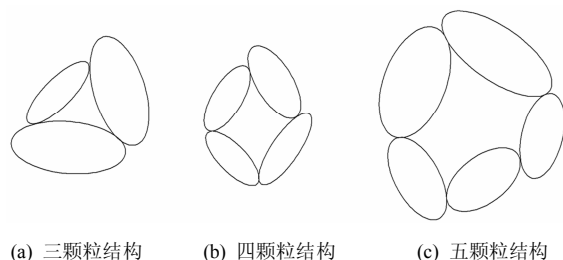


图1 颗粒连接状态

Fig.1 Particles connection structures

显然,基本结构的颗粒数量越多,形成的闭合链就越长,这时形成的由链围成的孔隙就会越大,其应力强度也会相应降低。如果形成分形结构,其相应的孔隙就会更大,应力强度也会更低。

下面以三颗粒基本结构为例,介绍迭代函数的使用方法:

假定形成三角形的分形结构如图2所示。

$$E_0\{A, B, C\} = \{(0, a), (b, 0), (0, 0)\}$$

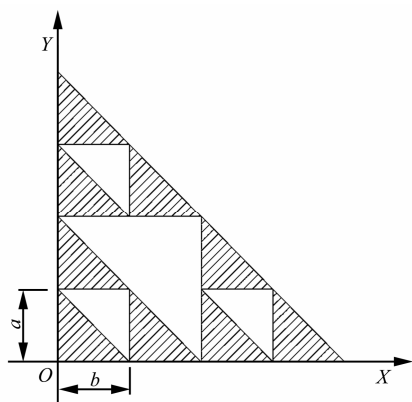


图2 分形结构图
Fig.2 Fractal structure

迭代函数为

$$W_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{a}$$

$$W_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{b}$$

式中: $\bar{a}$ 、 $\bar{b}$ 为上一级结构单元 y 、 x 方向的边长。

进行一级迭代

$$\begin{cases} W_1(A) = (0, 2a) \\ W_1(B) = (b, a) \\ W_1(C) = (0, a) \end{cases}, \begin{cases} W_2(A) = (b, a) \\ W_2(B) = (2b, 0) \\ W_2(C) = (b, 0) \end{cases}$$

这样就得到一级结构的各顶点坐标集为:

$$E_1\{(A, B, C), (A, B, C)\} = \{(0, 2a), (2b, 0), (0, 0), (0, a), (b, 0), (a, b)\}$$

从以上的迭代过程可以看到, 通过一次迭代, 新的坐标点增加到6个(2组), 构成了一级迭代结构, 新结构的尺度分别在 x 、 y 方向增大了1倍, 这时孔的坐标为 $\{(0, a), (b, a), (b, 0)\}$, 这个孔可以称为一级孔。

扩张因子可以通过 $r=d[W_1(x_1), W_2(x_2)]$ 来计算, 同时也可以计算出相应的分维值。

通过以上的例子可以发现, 一旦组合基本结构确定, 在确定了变换规则, 即组成组合规则后, 就可形成结构的数学描述。这为实现颗粒组合结构的定量化描述提供了一种数学方法。利用这种方法可以实现分形结构的定量描述, 也可以实现计算机的可视化模拟, 为实现计算机模拟颗粒土的结构奠定

了基础。

当颗粒组成的土体分形结构为非规则或随机分形结构时, 扩张因子和组成基本单元的颗粒尺度将是变化的。这时仍然可以利用上述叠代方式对颗粒结构的形成进行计算机的模拟和量化的描述。不过这时形成的模拟实体结构是不规则的, 其中的孔隙大小也是不规则的。

2.3 多重分形结构

在实际的岩土结构中, 单一分形的结构是比较少见的, 大部分是存在多个分形值的分形结构体, 各个分形值按某种分布混合在一起。多重分形的生成往往是由于土体在形成过程中受到多个因素的影响, 而每个因素的影响范围是有限的, 这样就形成了不同的分形并按一定的分布存在于整个土体结构中。分形值的分布越宽, 说明控制因素的作用越复杂, 而影响土体材料强度的是起控制作用的那个分形结构。所以, 对于多重分形结构体, 一般是要找到起关键作用的分形结构。

3 分形结构的强度分析

由颗粒组成的分形结构体, 为了能较为简单地分析其强度, 假定颗粒之间的连接是以点连接的方式进行。由于颗粒的大小不同, 颗粒构成的结构形式不同, 颗粒之间连接点的分布在整个结构中是不均匀的, 因此, 如果直接按照均匀介质中的应力强度描述的方法来分析颗粒结构体的承载能力, 显然是不合适的。但如果仅仅按连接点的承载能力来描述整个颗粒结构系统的强度, 由于连接之间存在的孔隙大小不同, 各个连接所影响的区域也是不同的, 这样就无法相互比较各种不同结构土体的强度。为了解决这一问题, 可以根据各个连接点在结构中的影响范围, 进行连续化处理, 来考虑其所在影响区域上的应力强度问题, 也就是采用影响区域上的平均强度来描述这种颗粒结构体的强度。以此作为标准就可以进行各种结构体强度的比较了。

3.1 连接点强度的连续化处理方法

连接点的连续化处理应按等效原则进行。也就是在点上的作用力与影响区域上的作用效应应是相同的。即:

$$F = A^* \sigma \quad (2)$$

式中: F 为颗粒连接点作用力; A^* 为影响区域; σ 为等效应力。如果已知连接点的作用力, 一旦确定了影响区域, 就可以依据式(2)计算出等效应力(或等效应力强度)。

连接点的影响区域确定往往比较复杂, 因为对于不同的结构形态, 连接点的影响范围是不一样的。对于一般空间中的连接点的分布, 为了确定连接点的影响区域, 可以假定在由连接点构成的空间集合中, 某一点受到的影响以这一点到连接点的距离为其影响参数。一般假定距离越近, 影响参数取值越大。具体计算方法如下:

设将某一连接点周围的空间划分为很多个小单元, 每个单元的面积为 A_i , 根据每个单元到连接点的距离, 赋予其相应的权重系数分别为 $k_0, k_1, k_2, \dots$ 。这里 $k_0, k_1, k_2, \dots$ 的取法为 k_0 是距离连接点最近的权重系数, k_i 为第 i 个距离上的权重系数, $k_0, k_1, k_2, \dots$ 的各个值按降序排列。并且有

$$\sum_{i=1}^n k_i = 1 \quad (3)$$

这样影响区域为

$$A^* = \sum_{i=1}^n k_i A_i \quad (4)$$

当 n 取不同的值时, 可以得到不同级别的影响区域的值。这样就可以求任一连接点的各级影响范围取值。

为了计算方便, 可以取 $k_0=1, k_1=k_2=\dots=0$ 。这样就把影响区域的求解问题转化为计算几何中的 Voronoi 图^[15-16]问题。

Voronoi 图的定义为: 给定点集 $\{P_i\}$, $i=1, 2, \dots, N$ 存在多面体集合 $\{V_j\}$, $j=1, 2, \dots, N$ 与之对应, 其中每一个多面体 $\{V_j\}$ 含且仅含 $\{P_i\}$ 中的一个点 $\{P_j\}$, V_j 中的每一点到 P_j 的距离小于该点到 $\{P_i\}$ 中除 P_j 外其任一点的距离。即

$$V_j = \{P_i | |P - P_j| < |P - P_i|, \forall i \neq j\} \quad (5)$$

集合 $\{V_i\}$ 覆盖点集 $\{P_i\}$ 确定的域, 且 V_i 互不重叠。

当需要的精度较高时, 可以赋予 $k_0, k_1, k_2, \dots$ 等不同的值进行计算, 从而保证整个空间上的值更连续和光滑。这里 Voronoi 域的物理意义就是在由颗粒相互连接形成的网络空间中, 各个连接点根据结构特点, 形成假定的空间影响区域, 这个区域的选取在这里有一定的近似性。

3.2 连接点应力强度的计算

连接点的承载能力是由连接方式、颗粒间的作用方式等决定的。连接点的应力强度计算是指根据连接的承载能力, 并考虑连接点影响区域的范围, 换算出的等效应力强度。影响区域的计算可以按各个连接的 Voronoi 域来考虑。对于平面问题如图 3

所示, 设 Voronoi 域某一截面的法线方向为 α , 相应的这一截面的长度为 l_α , 则有:

$$\sigma_\alpha = F/l_\alpha, \tau_\alpha = Q/l_\alpha, m = M/A \quad (6)$$

式中: F 为连接点在 α 方向的正向力; Q 为垂直于截面法线方向的剪力; M 为连接点上的弯矩; $\sigma_\alpha, \tau_\alpha, m$ 分别为 α 方向的正应力、剪应力和偶应力分量。当 F, Q, M 分别为连接点在 α 方向的承载能力分量时, 可以依据式 (6) 计算出这一方向上的应力强度分量。

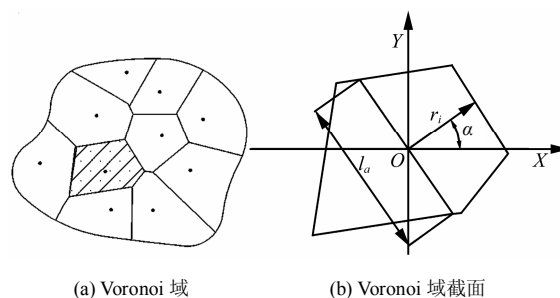


图 3 颗粒的 Voronoi 域
Fig.3 Voronoi domains of particles

对于不同的 α 值, l_α 也会随 Voronoi 域的形态而发生变化, 所以, Voronoi 域的影响从式 (6) 中可以看到, 当 Voronoi 域变大时, 如果连接点的连接承载能力不变, 计算得到的等效应力强度会降低, 当 Voronoi 域在各个不同的方向上变化较大时, 相应地各方向上的等效应力强度值也会发生变化。也就是说, 即使连接点本身的承载能力是各向同性的, 也会由于 Voronoi 域的各向异性导致等效应力强度的各向异性。

3.3 分形结构的应力强度

在分形结构中, 各个连接点在结构中所起的作用并不是等同的。分形结构是由基本结构按照相似组合规则组合起来, 每一个组合层级上的连接点只在这个层级上起作用, 其影响的区域或范围一般也只是在这个层级的空间范围内。当考虑更上一层的组合结构时, 又由新的连接点起相应的作用, 其影响区域或范围将覆盖一个更大的范围, 并且可能叠加在原来的区域上。因此, 分形结构的 Voronoi 域计算或划分, 必须按分形结构的组合层级上的连接点来进行, 而这时将忽略掉下一个层级的连接点的作用。

各个层级上的 Voronoi 域形态, 一般是凸多边形, 从前面推得的计算应力强度的式 (6) 可以发现, 任一方向上的截面长度越大, 则相应的应力值越小, 即强度的控制值越小。凸多边形中离连接点最远的

角点相对截面长度一般较大, 可以作为此点应力强度的控制点。

Voronoi 域的计算可以通过各节点间连线的垂直平分线来进行。设节点 A 周围有 n 个节点, 将 A 与这 n 个节点连接并求连线的垂直平分线, 这些垂直平分线所连接起来的围绕 A 点形成的凸多边形就是 A 点的 Voronoi 域。从图 4 中可看出, 垂直平分线与连线的交点是这个方向上距离 A 点最近的点, 相邻两条垂直平分线的交点是距离 A 点最远的点 (在两连线之间)。这个最远点的距离可按式 (8) 方法计算。

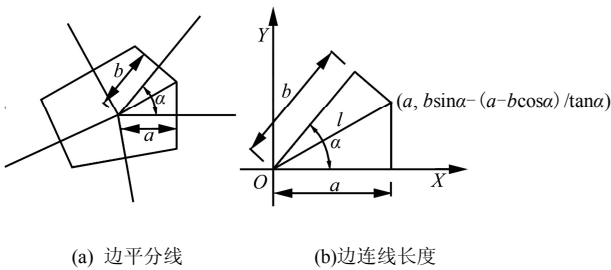


图 4 Voronoi 域边连线计算
Fig.4 Edge calculation of Voronoi domain

取 A 点相邻的两条与其他连接点的连线的 $1/2$ 长度分别为 a 和 b (见图 4), 两条边的垂直线的方程为

$$\left. \begin{aligned} y - b \sin \alpha &= -\frac{1}{\tan \alpha} (x - b \cos \alpha) \\ x &= a \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

两垂直平分线的交点坐标就是上述式 (7) 的解, 即 $(a, b \sin \alpha - (a - b \cos \alpha) / \tan \alpha)$, 交点到原点的距离就是其最大长度:

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{a^2 - 2ab \cos \alpha + b^2}}{\sin \alpha} \quad (8)$$

对于分形结构各层级上的结构形态都是相似的, 因此, 在不同的分形层级上, 其 Voronoi 域边的尺寸可表达为

$$\left. \begin{aligned} a &= r^n a_0 \\ b &= r^n b_0 \\ \alpha &= \text{常数} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中: a_0 、 b_0 为基本结构时的 Voronoi 域边长; r 为扩张因子; n 为分形结构层级数。将式 (9) 代入式 (8), 可得

$$l = \frac{r^n \sqrt{a_0^2 - 2a_0 b_0 \cos \alpha + b_0^2}}{\sin \alpha} = r^n l_0 \quad (10)$$

式中: $l_0 = \frac{\sqrt{a_0^2 - 2a_0 b_0 \cos \alpha + b_0^2}}{\sin \alpha}$ 。也就是说, 在第

n 级结构上, Voronoi 域的最远点距离与 r^n 成正比, 级数越高, r^n 值越大, 这时 l 的值也越大。如果考虑连接点的承载能力都相同的情况下, 相应的等效应力强度就会越低。当分形结构的各层级之间的相似扩张因子不同时, 可以设分形级别影响系数为

$$\bar{k} = r_1 r_2 r_3 \cdots r_n = \prod_{i=1}^n r_i \quad (11)$$

得 $l = \bar{k} l_0$ 。

这里 l 的值是连接点相邻两条连线之间形成的 Voronoi 域的“边缘”的值, 围绕着连接点 A 可能有 n 个这样的值, 且各不相同, 为了取得 Voronoi 域的最大截面尺寸, 在不同的方向上可以近似取 $2l$ 的值作为这一方向的截面长度。对于连接点的 Voronoi 域面积计算方法见式 (12) ~ (14)。

设 Voronoi 域由 n 个凸角 (见图 5), 则每个凸角的面积为

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{2} (a_i h_a + b_i h_b) = \frac{1}{2} (a_i l_i \sin \alpha_1 + \\ &b_i l_i \sin \alpha_2) = \frac{1}{2} (a_i \sqrt{l_i^2 - a_i^2} + b_i \sqrt{l_i^2 - b_i^2}) \end{aligned} \quad (12)$$

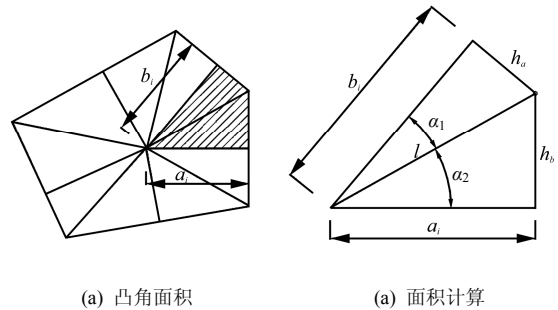


图 5 Voronoi 域面积计算
Fig.5 Area calculation of Voronoi domain

将式 (9) 代入式 (12) 并整理得

$$A_i = r^{2n} A_{0i} \quad (13)$$

式中: $A_{0i} = \frac{1}{2} (a_{0i} \sqrt{l_{0i}^2 - a_{0i}^2} + b_{0i} \sqrt{l_{0i}^2 - b_{0i}^2})$ 。

整个 Voronoi 域的面积就是将 n 个凸角面积相加:

$$A = \sum_{i=1}^m A_i = r^{2n} \sum_{i=1}^m A_{0i} = r^{2n} \bar{A}_0 \quad (14)$$

式中: $\bar{A}_0 = \sum_{i=1}^m A_{0i}$ 。

连接点的应力强度与连接点承载能力形态有

关, 为了说明问题又计算简单, 设连接点的承载能力为各向同性, 即有

$$\left. \begin{aligned} F^2 + Q^2 &= R_p^2 \\ M &= M_p \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

这样应力强度可表达为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \frac{R_p}{2l} = \frac{R_p}{2l_0} \left(\frac{1}{r} \right)^n \\ m_p &= \frac{M_p}{A} = \frac{M_p}{A_0} \left(\frac{1}{r^2} \right)^n \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中: σ_R 截面上正应力强度; m_p 为偶应力强度。由此可看出分形结构的等效应力强度与基本单元的 Voronoi 域截面或面积成反比, 与比例因子的倒数的 n 次方或 $2n$ 次方成正比。当 n 增加时, 等效应力强度按几何级数下降。这是分形结构与其他结构的一个重要区别和特点。

当通过一定的方法能测得土体结构的分形维时, 式 (16) 可以表达为与分形维有关的形式。

根据分形几何中的 Moran 方程^[12], 由迭代系统产生的函数的分形维满足以下方程:

$$\sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{r_i} \right)^D = 1 \quad (17)$$

式中: D 为迭代函数图的分维值; r_i 为第 i 个变换函数 W_i 的扩展因子, 不同变换函数的数量总量为 k 。在规则的分形 IFS 系统中, 映射的比例因子 r_i 是相同的, 因此有 $k(1/r)^D = 1$, 即 $k=r^D$ 或 $r=k^{1/D}$ 。

另外, 在岩土这样的实际颗粒材料中, 分形结构的级别不可能无限大, 而且从式 (16) 可以发现, 应力强度随着分形结构的级数而降低, 这也决定了土体结构的分形结构的级数。设测定得到的某类土体的分形结构的最大尺寸为

$$\left. \begin{aligned} a_{\max} &= r^n a_0 \\ b_{\max} &= r^n b_0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

将 $r^n = a_{\max}/a_0$ 代入式 (16), 得应力强度表达式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \frac{R_p}{l_0} \left(\frac{1}{k^n} \right)^{1/D} \\ m_p &= \frac{M_p}{A_0} \left(\frac{1}{k^{2n}} \right)^{1/D} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

或

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \frac{R_p}{l_0} \left(\frac{a_0}{a_{\max}} \right) \\ m_p &= \frac{M_p}{A_0} \left(\frac{a_0}{a_{\max}} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

分析式 (19)、(20) 可以发现, 具有分形结构的土体强度与构成分形结构的基本单元的承载能力直接相关。基本结构的极限承载能力越高, 则土体的应力强度值就越大。土体形成的分形结构的级数越大, 相应的分形结构占据的空间就越大, 而在基本结构极限承载能力相同的情况下, 相应的应力强度就越低 (截面增大)。另外, 一般来讲, 土体的分维值越大, 意味着土体结构分布越密集, 在基本结构极限承载能力相同的情况下, 相应的土体应力强度会越高。从形成分形结构的尺度上分析可以发现, 基本结构单元尺寸相对于分形结构的整体尺寸比较, 两者相差越大, 等效应力强度值也会越低。

土体结构中, 往往可能存在多个分形结构, 且分形结构的尺寸也会有很大的差距。所以土体应力强度可能会受到多个分形结构体的控制。特别是对于宏观应力强度指标来讲, 实际上在微观上是一个区域范围内的统计指标, 在一个微观区域中可能存在多个具有不同分形结构的更小的区域, 反映到宏观上, 实际上是这些小区域的应力强度指标的统计平均值。所以, 要真正由微观上分形结构应力强度来统计得到宏观上的应力强度指标, 还必须对各类分形结构在土体中的分布规律搞清楚, 而这个问题还需要进一步的研究。

3.4 应力强度影响因素的讨论

根据上述的分析, 可以对影响分形结构土体的应力强度影响因素进行一些讨论。

(1) 土体颗粒系统的结构分形维的大小对土体的强度的影响

从前面分析中可以看到, 由于 $k \geq 3$, $1/k$ 是小于 1 的数, 则土体的分形维 D 越大, $(1/k)^{1/D}$ 就越大, 这意味着在其他条件相同时, 应力强度就越大。直观地理解就是 D 越大, 几何结构越复杂, 相应的应力强度也越大。

(2) 基本结构单元的颗粒数对强度的影响

基本结构的颗粒数越多, 从公式中反映出强度值与其成反比。结构上讲, 基本结构颗粒数越多, 形成的环的长度越长, 占据的空间就越大, 从力学上讲, 就越不稳定, 因此, 其强度必然越低。在实际中, 也可以发现, 像砂这类土体材料, 其颗粒比较大, 颗粒间的作用力一般只能是摩擦力, 形成的稳定结构一般是三颗粒结构体。而对于黏土, 颗粒较小, 颗粒间的作用力比较复杂, 在一些环境中可以生成絮状体, 也就是可能形成环状结构, 颗粒数相对较多。两者的强度比较可以发现, 砂土类的强度一般要比黏土类的土体强度要高。

(3) 分形结构的相似级数的影响

土体中分形结构的级数实际上决定了土体中最大孔隙的尺寸,分形结构的级数越多,其相应的最大孔隙越大,反映在结构上就是连接点所影响的区域越大。从式(19)中反映出来,就是等效应力强度会越低。土体中存在的最大孔隙的尺寸,往往决定了土体的强度。在宏观上,常用孔隙率来作为影响土体强度的一个参数,以此来衡量对土体强度的影响。通过现在的分析可以发现,这存在着概念上的偏差。当孔隙比较均匀、孔隙的尺寸大小比较一致时,这种分析比较接近于实际(如对重塑土的分析),但当土体具有很强的结构性,其中的孔隙大小相差较大时,分析的结果就会与实际相差较多。

(4) 偶应力强度与分形结构土体应力强度的关系从式(19)中可以发现,偶应力强度与基本结构单元的面积(二维)成反比,即基本结构体越大,偶应力强度就越小,由此可推论出:就是在其他条件相同的情况下,颗粒越大,由颗粒组成的基本结构单元的几何尺寸就会越大,这时的偶应力强度就会越低。这说明,在连接点的连接承载能力一定的情况下,颗粒越大,越容易破坏。这种破坏是弯扭破坏,也就是滚动破坏。另外,随分形结构的级数的升高,偶应力强度降低的速度是一般应力强度降低速度的平方,偶应力强度降低的速度更快。所以,偶应力强度问题在颗粒系统中,更应引起重视。而这一点在经典理论中是无法考虑和解决的。

4 结 论

(1) 对于分形土体其宏观上可比较的强度是等效应力强度,与均匀材料的强度概念是完全不同的。

(2) 影响分形结构土体强度的因素主要有:分形结构土体的分维值的大小、基本结构单元的承载能力和分形结构的相似级数。

(3) 偶应力强度在由颗粒组成的分形结构土体中是不能忽略的一个重要因素。这也是颗粒材料与经典的连接性材料的一个重要区别。

分形结构是土体中普遍存在的一种结构现象,笔者对这种结构现象对土体强度的影响进行了一些初步的探讨,也获得了一些有益的结果。但由于土体结构、颗粒构成的结构形态、颗粒之间连接、颗粒形态对颗粒组构影响等的复杂性,还有许多问题需要深入研究。

参 考 文 献

- [1] 黄冠华, 詹卫华. 土壤颗粒的分形特征及其应用[J]. 土壤学报, 2002, 39(4): 490—497.
- [2] HUANG Guan-hua, ZHAN Wei-hua. Fractal property of soil particle size distribution and its application[J]. *Acta Pedologica Sinica*, 2002, 39(4): 490—497.
- [3] BARTOLI F, PHILIPPY R, DOIRISSE M, et al. Structure and self-similarity in silty and sandy soils: The fractal approach[J]. *Journal of Soil Science*, 1991, 42(2): 167—185.
- [4] 王大鹏, 王秋兵, 韩春兰, 等. 辽宁省古红土颗粒分形特征研究[J]. 安徽农业科学, 2007, 35(20): 6186—6189.
- [5] WANG Da-peng, WANG Qiu-bing, HAN Chun-lan, et al. Study of fractal features of paleosol in Liaoning Province[J]. *Journal of Anhui Agricultural Sciences*, 2007, 35(20): 6186—6189.
- [6] 伍丢峰. 土颗粒粒径分维值与土的黏聚力的关系[J]. 湖南水利水电, 2007, 2: 23—24.
- [7] WU Diu-feng. Soil particle size fractal value and the cohesive soil[J]. *Hunan Hydropower*, 2007, 2: 23—24.
- [8] 张佑林, 夏家华, 黎国华, 等. 粉体颗粒的形状与分维[J]. 武汉工业大学学报, 1996, 18(4): 53—56.
- [9] ZHANG You-lin, Xia Jia-hua, LI Guo-hua, et al. The partical shape and fractal dimension[J]. *Journal of Wuhan University of Technology*, 1996, 18(4): 53—56.
- [10] 杜学玲, 杨俊彪, 袁吉鸿. 分形分维与土力学参数关系探讨[J]. 西部探矿工程, 2005, (4): 23—28.
- [11] DU Xue-ling, YANG Jun-biao, YUAN Ji-hong. Discussion on relationship between fractional dimension and parameters of soil mechanics[J]. *West-China Exploration Engineering*, 2005, (4): 23—28.
- [12] 董学仁. 基于分形的微粉颗粒几何形态快速分类法[J]. 中国粉体技术, 2000, 6(2): 45—48.
- [13] DONG Xue-ren. Methods of shape analysis for microfine particle[J]. *China Powder Science and Technology*, 2000, 6(2): 45—48.
- [14] 王毅力, 芦家娟, 周岩梅, 等. 沉积物颗粒表面分形特征的研究[J]. 科学学报, 2005, 25(4): 57—463.
- [15] WANG Yi-li, LU Jia-juan, ZHOU Yan-mei, et al. Study of the particle surface fractal characteristics of sediment[J]. *Acta Scientiae Circumstantiae*, 2005, 25(4): 457—463.
- [16] 钱凯, 葛晓光, 吴潇. 潘集矿区松散沉积物颗粒的分形特征[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2006, 29(6): 658—661.
- [17] QIAN Kai, GE Xiao-guang, WU Xiao. Fractal feature of soft sediments in the bottom Cenozoic of the Panji coal mine area[J]. *Journal of Hefei University of Technology(Natural Science)*, 2006, 29(6): 658—661.

- [10] 张金凤, 张庆河, 林列. 三维分形絮团沉降的格子 Boltzmann 模拟[J]. 水利学报, 2006, 37(10): 1253—1258.
ZHANG Jin-feng, ZHANG Qing-he, LIN Lie. Lattice Boltzmann simulation of 3-D fractal flocs settling[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 2006, 37(10): 1253—1258.
- [11] 蔡绍洪, 周海平, 王春香. 颗粒堆积物在不同堆放方式下的占空比和分形维数的计算[J]. 贵州科学, 2007, 25(1): 9—12.
CAI Shao-hong, ZHOU Hai-ping, WANG Chun-xiang. The calculation of fractal dimension of granular material piled in different forms[J]. **Guizhou Science**, 2007, 25(1): 9—12.
- [12] 李水根. 分形[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [13] 潘陆益. IFS 分形图拟仿射变换模型及其实现[J]. 计算机系统应用, 2008, (1): 83—85.
PAN Lu-yi. Pseudo-affine transform of IFS fractal images and its realization[J]. **Computer System and Applications**, 2008, (1): 83—85.
- [14] 覃凤清, 何小海. IFS 在分形图形构造中的应用研究[J]. 郑州轻工业学院学报(自然科学版), 2007, 22(4): 126—128, 136.
QIN Feng-qing, HE Xiao-hai. Research on the application of IFS in fractal image construction[J]. **Journal of Zhengzhou University of Light Industry(Natural Science)**, 2007, 22(4): 126—128, 136.
- [15] 严燕儿. Voronoi 图与空间关系分析[D]. 南京: 南京大学, 2000.
- [16] 钱波, 张李超, 黄树槐. 基于平面多边形 Voronoi 图的算法与快速成形应用[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2008, 36(1): 125—128.
QIAN Bo, ZHANG Li-chao, HUANG Shu-huai. Voronoi diagrams algorithm based on polygon and in the rapid prototyping applications[J]. **Journal of Huazhong University of Science and Technology(Natural Science Edition)**, 2008, 36(1): 125—128.